2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）真题解析 1.0 版

说明：试题为梅花卷，同一道题目中，不同考生的选项顺序不同。请在核对答案时注意题目和选项的具体内容。

一、选择题：

1. 当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（　　）

A.1　　　　B.2

C.3　　　　D.4

2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 由 3 个不同的实根，则 k 的取值范围

A. $(-\infty, -4)$　　　　B. $(4, +\infty)$

C. $[-4,4]$　　　　D. $(-4,4)$

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$，则 a,b,c 依次为（　　）

A. 1，0，1　　　　B. 1，0，2

C. 2，1，3　　　　D. 2，1，4

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛　　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

5. 设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（　　）

A.0　　B.1

C.2　　D.3

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 X^TAX 规范形为（　　）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　B.与 μ 有关，而与 σ^2 无关

C. 与 μ，σ^2 都有关　　D.与 μ，σ^2 都无关

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=$______________

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x$　（$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$）的拐点坐标为______________

11. 已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$，则 $\int_0^1 x^2f(x)dx=$______________

12. A、B 两商品的价格分别为 P_A、P_B，需求函数 $Q_A=500-P_A^2+P_AP_B+2P_B^2$，$P_A=10$，$P_B=20$，求 A 商品对自身价格的需求弹性 $\eta_{AA}=$______ $(\eta>0)$

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & a^2-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$，$AX=b$有无穷多解，求$a=$______

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)\begin{cases}\frac{x}{2},0<x<2,\\ 0,其他,\end{cases}$ $F(x)$为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$________.

三、解答题

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0\\ xe^x+1,x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的极限.

16. 已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$.

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

17. 已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y(1)=\sqrt{e}$.

（1）求 $y(x)$;

（2）$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$.求平面区域 D 绕 x 轴旋转绕成的旋转体体积.

18. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

19. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（1）证明 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3\cdots)$;

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

20. 已知向量组（I）$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$，

（II） $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，若向量组（I）与向量组（II）等价，求 a 的

取值，并将 β 用 a_1,a_2,a_3 线性表示.

21. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，

（I）求 x,y;

（II）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B.$

22. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立；

23. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

数学（三）参考答案及解析（社科赛斯数学教研团队提供）

1.　【答案】C

【解析】$x-\tan x\sim -\frac{1}{3}x^3$, 与 x^k 同阶，所以 $k=3$，选 C.

2.【答案】D

【解析】令 $f(x)=x^5-5x+k$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.又由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，方程要有三个不等实根，只需要 $f(-1)=4+k>0, f(1)=-4+k<0$，因此的取值范围为 $-4<k<4$.

3.【答案】D

【解析】由通解形式知，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，故特征方程为 $(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1$，所以 $a=2,b=1$，又由于 $\bar{y}=e^x$ 是 $y''+2y'=ce^x$ 的特解，代入得 $c=4$.

4.【答案】B

【解析】由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}=0$ 故当 n 充分大时，$\left|\frac{v_n}{n}\right|<1$，所以 $|u_nv_n|=\left|nu_n\cdot\frac{v_n}{n}\right|<|nu_n|$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛

5.【答案】A

【解析】由于方程组的基础解系中只有两个向量，则 $r(A)=2<3, r(A^*)=0$.

6.　【答案】C

【解析】由 $A^2+A=2E$ 可得 A 的所有特征值为 $\lambda^2+\lambda\text{-}2=0$ 的根，即 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$.又 $|A|=4$ 可得 $\lambda_1=1$ 为一重特征值，$\lambda_2=-2$ 为二重特征值,故 X^TAX 的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7.　【答案】C

【解析】A：$P(A+B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(AB)=0\Rightarrow A$ 与 B 互斥

B：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow A$ 与 B 独立

C：$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(BA)\Rightarrow P(A)=P(B)$

8.　【答案】A

【解析】X 与 Y 独立，则 $X\text{-}Y\sim N(0,2\sigma^2)$,所以 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

故 $P(|X-Y<1|)=P(\left|\dfrac{X\text{-}Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma})=2\phi\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}-1$.从而 $P(|X-Y<1|)$ 与 μ 无关，选 A.

9.　【答案】e^{-1}

【解析】$\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]^n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}$.

10.【答案】$(\pi,-2)$

【解析】令 $y''=-x\sin x=0$，可得 $x=\pi$，因此拐点坐标为$(\pi,-2)$

11.【答案】$\dfrac{1-2\sqrt{2}}{18}$

【解析】依题意，$f'(x)=\sqrt{1+x^4}$ 且 $f(1)=0$.因此，

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx^3=\frac{1}{3}\left[x^3 f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx\right]=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$$

12.【答案】0.4

【解析】因为$\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\bullet\frac{dQ_A}{dP_A}=-\frac{P_A}{Q_A}\bullet(-2P_A-P_B)$,将$P_A=10$,$P_B=20$,$Q_A=1000$ 代入可得$\eta_{AA}=0.4$

13. 【答案】1

【解析】因为$Ax=b$有无穷多解，故$r(A)=r(A,b)<3$，对矩阵(A,b)进行初等行变换：

$(A,b)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{pmatrix}$ 故$a^2-1=a-1=0$，所以$a=1$.

14. 【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】X 密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & x\le 0\cup x\ge 2\end{cases}$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dx=\begin{cases}1 & x>2\\ \frac{x^2}{4} & 0<x\le 2\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^3}{6}|_0^2=\frac{4}{3}$，所以

$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{F(X)>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

15. 【答案】$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1);x>0\\ e^x(x+1);x<0\end{cases}$,极大值 $f(0)=1$.

极小值 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】当$x>0$时：

$f'(x)=\left(e^{2x\ln x}-1\right)'=\left(e^{2x\ln x}\right)'=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)=2x^{2x}(\ln x+1)$

当$x<0$时：$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

因此 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1);x>0\\e^{x}(x+1);x<0\end{cases}$，

当 $x=0$：

$$f_{+}'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$$

$$f_{-}'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{xe^{x}}{x}=\lim_{x\to0+}e^{x}=0$$

当 $x>0$ 时， $f'(0)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x<0$ 时 $f'(0)>0, f(x)$ 单调递增，

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，且 $f(0)=1.$

令 $f'(x)=0$ 得， $x=-1$ 及 $x=\frac{1}{e}$. 又 $f''(-1)>0, f''\left(\frac{1}{e}\right)>0$，

故极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

16. 【答案】$1-3f_{11}''-f_{22}''$

【解析】依据题意知：

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)$$

因为 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，故 $f_{12}''=f_{21}''$，因此

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f_{11}''+f_{12}'')-(f_{21}''+f_{22}'')=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f_{11}''+f_{12}'')-(f_{21}''+f_{22}'')=1-f_{11}''+f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-(f_{11}''-f_{12}'')+(f_{21}''-f_{22}'')=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f''_{11}-2f''_{12}-f''_{22}+1-f''_{11}+f''_{22}-f''_{11}+2f''_{12}-f''_{22}=1-3f''_{11}-f''_{22}$$

17. 【答案】（1）$y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$　　（2）$\frac{\pi}{2}(e^4-e)$

【解析】（1）$y(x)=e^{-\int -xdx}(C+\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int -xdx})=e^{\frac{x^2}{2}}(C+\sqrt{x})$

因为 $y(1)=\sqrt{e}$，故 $C=0$，所以 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$

（2）由旋转体体积公式：

$$V=\pi\int_1^2(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}})^2dx=\pi\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$$

18. 【答案】略

【解析】设在区间 $[n\pi,(n+1)\pi](n=0,1,2,\cdots)$ 上所围的面积记为 μ_n，则

$$\mu_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}d\cos x=-(e^{-x}\cos x-\int\cos xde^{-x})$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}d\sin x$$

$$=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x-\int\sin xde^{-x})$$

$$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-I$$

记 $I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$，则

$\mu_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$（注意 $\cos n\pi=(-1)^n$）

因此所求面积为 $\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}+1}$.

19. 【答案】（1）略．（2）1.

【解析】（1）易知，当 $x\in(0,1)$ 时，$x^{n+1}\cdot\sqrt{1-x^2}<x^n\cdot\sqrt{1-x^2}$.

故 $a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=a_n$，从而 $\{a_n\}$ 单调减少.

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sqrt{1-x^2}x^{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{n-1}\int_0^1 x^n\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$$

$=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-2}-\dfrac{1}{n+1}a_n$ 故 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

（2）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=A.$ 由于 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$，取 $n\to+\infty$，

有 $A=\dfrac{1}{A}\Rightarrow A^2=1.$ 由于 $a_n\geq 0.$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=A>0.$ 所以 $A=1.$

20. 【答案】$a\neq -1$，$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

【解析】

第一问：$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

(1)当 $a=1$ 时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&-1&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

易知 I 与 II 等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&0&-2&2&0\end{pmatrix}$

显然 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 不能由前三个向量线性表示，故 I 与 II 不等价

(3)当 $a^2\neq 1$ 即 $a\neq 1$ 且 $a\neq -1$ 时

$\gamma(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$=3,由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&2\\a-1&1-a&a^2-1\end{vmatrix}=2(a^2-1)\neq 0$, 知 $\gamma(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)$=3

易知 I 与 II 等价.

综上 $a\neq -1$ 即可

第二问：显然 $\begin{pmatrix}1\\2\\a^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\a^2-1\end{pmatrix}$，故 $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

21. 【答案】略

【解析】(1) 由于 $A\sim B$ 故 $\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}b_{ii}$，所以 $|A|=|B|$，

因此 $\begin{cases}x-4=1+y\\4x-8=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

(2) 由 (1) 可知 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-A)x=0\Rightarrow\xi_1=(-1,2,0)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-A)x=0\Rightarrow\xi_2=(-2,1,0)^T$

当$\lambda_3=-2$时，$(-2E-A)x=0\Rightarrow\xi_3=(1,-2,-4)^T$

所以存在$P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$使得$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$

同理，对于矩阵B

当$\lambda_1=2$时，$(2E-B)x=0\Rightarrow\eta_1=(1,0,0)^T$

当$\lambda_2=-1$时，$(-E-B)x=0\Rightarrow\eta_2=(1,-3,0)^T$

当$\lambda_3=-2$时，$(-2E-B)x=0\Rightarrow\eta_3=(0,0,1)^T$

所以存在$P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$使得$P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$

所以$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\Lambda\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$.

故存在$P=P_1P_2^{-1}$使得$P^{-1}AP=B$

$P_1=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&1&0\\0&0&-4\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以$P_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，即

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{3}&1\\2&\frac{1}{3}&-2\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

22.　【答案】（1）Z的概率密度$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda p\cdot e^{-\lambda z},z<0\\\lambda(1-p)e^{-\lambda z},z\ge 0\end{cases}$.

（2） $p=\frac{1}{2}$.

（3） X 与 Z 不独立.

【解析】（1）0 $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x},x>0\Rightarrow F_X(x)=1-e^{-\lambda x},x>0$

当 $z<0$ 时，$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{Y=-1,X\ge -z\}$

$=P\{Y=-1\}\cdot P\{X\ge -z\}$

$=p\cdot(1-F_X(-z))=p\cdot e^{\lambda z}$ $\qquad f_Z(z)=F'(z)=\lambda p\cdot e^{\lambda z}$

当 $z\ge 0$ 时，$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{Y=1,X\le z\}$

$=P\{Y=1\}\cdot P\{X\le z\}$

$=(1-p)\cdot F_X(-z)=(1-p)\cdot(1-e^{-\lambda z})$

$f_Z(z)=F'(z)=\lambda(1-p)e^{-\lambda z}$

故 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda p\cdot e^{-\lambda z},z<0\\ \lambda(1-p)e^{-\lambda z},z\ge 0\end{cases}$.

（2）$Cov(X,Z)=E(Y-EX)(Z-EZ)=E(X-EX)(XY-EXY)$

这里 $EX=\frac{1}{\lambda},EY=(-1)\cdot P+1\cdot(1-P)=1-2P,EXY=EX\cdot EY=\frac{1}{\lambda}\cdot(1-2P)$，则

$Cov(X,Z)=E(X-\frac{1}{\lambda})\left[XY-\frac{1}{\lambda}(1-2P)\right]=EX^2Y-\frac{1}{\lambda}EXY-(EX-\frac{1}{\lambda})\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot(1-2P)$

$=EX^2\cdot EY-\frac{1}{\lambda}\cdot EX\cdot EY$

$=\left[EX^2-(EX)^2\right]\cdot EY$

$=DX\cdot EY$

$=\frac{1}{\lambda^2}\cdot(1-2P)$

$=0$

$\Rightarrow P=\frac{1}{2}$

故当 $P=\frac{1}{2}$ 时， X 与 Z 不相关

23. 【解析】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，

即 $\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1$，所以 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\sigma^2)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

取对数 $\ln L(\sigma^2)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$，

求导数 $$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right]，$$

令导数为零解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

故 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 的最大似然估计为 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.